

1a

$$X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X \stackrel{\text{Def.}}{\iff} \mathbb{P}(X_n \rightarrow X) = 1$$

$$\Rightarrow \text{zu zeigen: } \mathbb{P}(3X_n + 4X_n Y_n \rightarrow 3X + 4XY)$$

$\Rightarrow$ Betrachte Gegenereignisse:

$$N_x := \{\omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\}$$

$$N_y := \{\omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(\omega) \neq Y(\omega)\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(N_x) = \mathbb{P}(N_y) = 0 \quad (\text{da } X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X, Y_n \xrightarrow{\text{f.s.}} Y)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{P}(N_x \cup N_y) &= \mathbb{P}((N_x \setminus N_y) \cup (N_y \setminus N_x) \cup (N_x \cap N_y)) \\ &= \mathbb{P}(N_x \setminus N_y) + \mathbb{P}(N_y \setminus N_x) + \mathbb{P}(N_x \cap N_y) \\ &\leq (\mathbb{P}(N_x) + \mathbb{P}(N_y)) \cdot 2 = 0 \leq \mathbb{P}(N_x) + \mathbb{P}(N_y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(N_x \cup N_y) = 0 \quad \checkmark \quad (\text{Wahrscheinlichkeiten in } [0, 1])$$

$\Rightarrow$ Wir betrachten nur in den Fällen $\omega \in \Omega \setminus (N_x \cup N_y)$,

$$\text{ob } 3X_n(\omega) + 4X_n(\omega)Y_n(\omega) \rightarrow 3X(\omega) + 4X(\omega)Y(\omega)$$

geht, da ~~die anderen~~ $\mathbb{P}(\Omega \setminus (N_x \cup N_y)) = 1$.

~~also sind~~

$\Rightarrow$ Wir haben (für $\omega \in (\Omega \setminus (N_x \cup N_y))$)

$$X_n(\omega) \rightarrow X(\omega), Y_n(\omega) \rightarrow Y(\omega) \quad \text{Def. } \forall \varepsilon > 0 \exists h_{x0}, h_{y0} : n \geq h_{x0} \wedge n \geq h_{y0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists h_{x0}, h_{y0} \in \mathbb{N} : n \geq h_{x0} \wedge n \geq h_{y0} \Rightarrow$$

Def.
Konvergenz

$$\Rightarrow |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon, \\ \wedge |Y_n(\omega) - Y(\omega)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow 3X_n(\omega) + 4X_n(\omega)Y_n(\omega) \rightarrow 3X + 4XY$$

$$\Rightarrow |3X_n(\omega) + 4X_n(\omega)Y_n(\omega) - 3X(\omega) - 4X(\omega)Y(\omega)| \leq 3\varepsilon +$$

$$\leq 3\varepsilon + 4X_n\varepsilon + 4Y_n\varepsilon + 4\varepsilon^2 \leq \tilde{\varepsilon} \quad ?$$

$$\Rightarrow \forall \omega \in \Omega \setminus (N_x \cup N_y) : 3X_n + 4X_n Y_n \rightarrow 3X + 4XY$$

$$\Rightarrow 3X_n + 4X_n Y_n \xrightarrow{\text{f.s.}} 3X + 4XY$$

$$\mathbb{P}(\Omega \setminus (N_x \cup N_y)) = 1$$

□

wieso kann man ebenfalls hoch beliebig klein, wenn ε klein genug gewählt

1b)

Gegenbeispiel:

~~$\Omega = [1, 2]$ mit GV~~

~~$\Omega = [1, 2]$ mit GV~~

~~$\Omega = \{2\} \Rightarrow P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$~~

~~$X_n(x) = \sqrt[n]{x} \Rightarrow X_n \rightarrow 1 \Rightarrow X = 1$~~

~~$Y_n(x) = (\sqrt[n]{x})^2 \Rightarrow Y_n \rightarrow 1 \Rightarrow Y = 1$~~

~~$Y_n(2) > 0 \Rightarrow \checkmark$~~

~~$\Rightarrow \frac{X_n}{Y_n}(x) = \frac{\sqrt[n]{x}}{(\sqrt[n]{x})^2} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$~~

1b)

Wieder nur $\omega \in \Omega \setminus (N_X \cup N_Y)$ betrachten:

$$\left| \frac{X_n(\omega)}{Y_n(\omega)} - \frac{X(\omega)}{Y(\omega)} \right| \leq \left| \frac{X(\omega) \pm \varepsilon}{Y(\omega) \pm \varepsilon} - \frac{X(\omega)}{Y(\omega)} \right|$$

$$= \left| \frac{(X(\omega) \pm \varepsilon) Y(\omega) - X(\omega) (Y(\omega) \pm \varepsilon)}{(Y(\omega) \pm \varepsilon) Y(\omega)} \right|$$

$$= \left| \frac{X(\omega) Y(\omega) - X(\omega) Y(\omega) \pm \varepsilon Y(\omega) \mp \varepsilon X(\omega)}{(Y(\omega) \pm \varepsilon) Y(\omega)} \right|$$

$$\leq \varepsilon$$

↑
ebenfalls
beliebig
klein

$$\Rightarrow \forall \omega \in \Omega \setminus (N_X \cup N_Y) : \frac{X_n}{Y_n} \rightarrow \frac{X}{Y}$$

$$\Rightarrow \frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{f.s.} \frac{X}{Y}$$

$\mathbb{P}(\Omega \setminus (N_X \cup N_Y)) = 1$

4/4

2) Nach Voraussetzung gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: P(\{\omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) \leq \delta$$

Dann existiert auch ein n_0 zu gegebenen ε, δ so, dass

$$P(\{\omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| > \frac{\varepsilon}{\max_{\omega} |Y(\omega)|}\}) \leq \delta$$

Wsp ist, wenn $Y \equiv 0$?
(oder Y unbeschränkt)?

$$\Leftrightarrow P(\{\omega \mid \max |Y| \cdot |X_n - X| > \varepsilon\}) \leq \delta$$

Da aber

$\forall \omega: |Y(\omega)| \leq \max |Y|$, gilt
muss nicht existieren!

$$P(\{\omega \mid |Y| \cdot |X_n - X| > \varepsilon\}) \leq P(\{\omega \mid \max |Y| \cdot |X_n - X| > \varepsilon\}) \leq \delta$$

Ausmultiplizieren ergibt

$$P(\{\omega \mid |X_n \cdot Y - X \cdot Y| > \varepsilon\}) \leq \delta$$

anderer Fälle?
0/4

$$\textcircled{3} \quad X_n \xrightarrow{i.v.} X \Leftrightarrow E(f \circ X_n) \rightarrow E(\tilde{f} \circ X) \quad \text{für} \\ \forall f \in \mathcal{C}_k \quad \text{was bedeutet } f \circ a? \quad \text{Int das konstant?} \\ \downarrow \downarrow \text{lineare Funktion} \quad = f(a)?$$

$$a \in \mathbb{R} \Rightarrow E(f \circ (a X_n)) = E((f \circ a) \circ X_n)$$

$$f(x) \text{ stetig} \Rightarrow \text{f(a x) stetig}$$

$$\text{(insbesondere für } a=0 \Rightarrow \tilde{f} \equiv 0)$$

$$\Rightarrow \text{Nach Definition } E(f \circ X_n) \rightarrow E(f \circ X) \quad \text{für } \forall f \in \mathcal{C}_k, \\ \text{also auch für } \tilde{f}$$

2/4 $\square$

4) Es ist $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und $P(\{\omega\}) = \frac{1}{4}$. $X_n(\omega) = \omega$ sind ZV.

Gesucht ist

$$P(X_1 + \dots + X_{500} < 1200) = P\left(\frac{X_1 + \dots + X_{500} - 500 \cdot E(X)}{\sqrt{500} \cdot \sigma} < \frac{1200 - 500 \cdot E(X)}{\sqrt{500} \cdot \sigma}\right)$$

So dargestellt können wir den Zentralen Grenzwertsatz anwenden.

Es werden also $E(X)$ und $\sigma(X)$ benötigt.

Offensichtlich ist

$$E(X) = \frac{1}{4} \sum_{\omega=1}^4 \omega = \frac{5}{2}$$

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = \frac{1}{4} \sum_{\omega=1}^4 \left(X(\omega) - \frac{5}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \left(\sum_{\omega} \omega^2 - 5 \cdot \left(\sum_{\omega} \omega\right) + 4 \cdot \frac{25}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{4} (30 - 5 \cdot 10 + 25)$$

$$= \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \sigma(X) = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1200 - 500 \cdot \frac{5}{2}}{\sqrt{500} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1200 - 1250}{50/2} = -2$$

$\leadsto$ Tabelle zur Normalverh.:

$$\phi(-2) = 0,0228$$

Also liegt die Wahrscheinlichkeit bei etwa 2,28%.

4/4